

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

JUVENTINO JOSÉ FÉRRER DA FONSECA

Onduladores e produção de radiação síncrotron

São Carlos
2023

JUVENTINO JOSÉ FÉRRER DA FONSECA

Onduladores e produção de radiação síncrotron

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Dr. Lucas Henrique Francisco

São Carlos
2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Fonseca, Juventino José Férrer da
Onduladores e produção de radiação síncrotron /
Juventino José Férrer da Fonseca; orientador Lucas
Henrique Francisco -- São Carlos, 2023.

27 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) --
Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São
Paulo, 2023.

1. Acelerador síncrotron. 2. Radiação síncrotron. 3.
Onduladores. I. Francisco, Lucas Henrique, orient. II.
Título.

*Às mulheres da minha vida,
minha mãe, Luciêne,
minha irmã, Karoliny,
e minha namorada, Catarina.
Aos meus familiares e amigos.
Por sempre acreditarem em mim.*

Resumo

Grande parte da física experimental é apoiada sobre a óptica, com a maneira como a luz pode adentrar a matéria e nos informar suas propriedades. Para satisfazer as mais distintas condições experimentais, a radiação síncrotron emerge como uma solução pertinente. Produzida nos síncrotrons por campos magnéticos, pode-se controlar suas características de maneira flexível e capturar faixas estreitas do seu espectro eletromagnético desde infravermelho até Raios X duros, com intensidades muito elevadas e polarização bem definida. Particularmente, um equipamento que produz e permite a manipulação da radiação síncrotron são os onduladores, dispositivos de campo magnético oscilante em seu interior. Esta monografia dedica-se à definição e caracterização de radiação eletromagnética com foco em radiação síncrotron no regime ultrarrelativístico quando produzida por onduladores.

Palavras-chave: Acelerador síncrotron. Radiação síncrotron. Onduladores.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 7 |
| 2 | Síncrotrons | 8 |
| 3 | Radiação | 10 |
| 3.1 | Eletrromagnetismo de cargas pontuais | 10 |
| 3.2 | Medidas de radiação | 11 |
| 3.3 | Distribuições de radiação | 12 |
| 3.4 | Radiação Síncrotron | 13 |
| 4 | Onduladores | 15 |
| 4.1 | Cinemática em um ondulador | 15 |
| 4.2 | Interferência | 17 |
| 4.3 | Espectro | 18 |
| 5 | Onduladores na Prática | 22 |
| 5.1 | Análises de campo de onduladores reais | 22 |
| 5.2 | Onduladores CNPEM - Sirius | 24 |
| 6 | Conclusão | 26 |
| | Referências | 27 |

1 Introdução

A luz é o objeto sensorial com o qual podemos nos comunicar como sociedade e também com os elementos do meio ambiente. A informação que a luz nos traz dos compostos da natureza expande as suas dimensões atômicas e assim podemos estudá-los. É por meio do entendimento de o que é luz e como ela interage com as substâncias que podemos desvendar suas estruturas geométricas e eletrônicas, combiná-las e assim desenvolver tecnologia e conhecimento.

A escala de comprimento da luz, seu comprimento de onda, pode se comparar à escala interatômica, por isso, sob certas condições, a matéria atua espalhando radiação incidente, resultando em padrões de difração que permitem resolver a estrutura desses compostos. Além disso, os mecanismos de absorção ou emissão de fótons causam transições eletrônicas nos níveis de energia dos materiais e ao coletar essa informação podemos analisar suas propriedades [1].

Para produção de luz para experimentos, explora-se diversos fenômenos físicos nos quais há emissão de radiação, por exemplo, choque de elétrons a altas energias contra placas metálicas [2], oscilação de corrente elétrica em um condutor [3] e radiação térmica de metais aquecidos [4]. Em destaque, um importante mecanismo é o de produção de radiação síncrotron.

Radiação síncrotron é emitida tangencialmente ao movimento de uma partícula relativística e dentro de um cone estreito, por isso é altamente colimada. Possui polarização bem definida e seu espectro abrange desde infravermelho até Raios X duros, com intensidades que excedem outras fontes, especificamente na região de altas frequências [5]. Com essas propriedades, a radiação síncrotron logo foi reconhecida como uma ferramenta poderosa para pesquisa em ciências de materiais, cristalografia, física de superfícies, química, biofísica, medicina e entre outros [5]. A produção dessa radiação é feita via aceleração por campo magnético e um dispositivo comum para isso são os onduladores [6].

Uma descrição conceitual e teórica dos onduladores será o principal propósito desta monografia, estruturada a seguir. Primeiramente, em 2, introduziremos o acelerador síncrotron, seu funcionamento, elementos magnéticos e onde os onduladores se inserem. A fundamentação eletromagnética de radiação será descrita na Seção 3. Os onduladores, seu princípio magnetostático e descrição teórica da produção de radiação serão apresentados em 4 e finaliza-se em 5 comentando-se aspectos do seu desenvolvimento prático e exemplos de modelos. Por fim, conclui-se este estudo na Seção 6.

2 Síncrotrons

Os síncrotrons são aceleradores de partículas, especificamente, íons leves, prótons e, principalmente, elétrons, que utilizam-se de campos magnéticos para manter as partículas em trajetos fechados enquanto elas emitem radiação a ser aplicada em pesquisa. São chamados síncrotrons por sincronizarem a aplicação de campo magnético com a crescente energia cinética relativística das partículas [1]. Dessa nomenclatura, chamou-se a radiação produzida por essas máquinas de luz síncrotron.

Em artigo de 1944, o físico russo Vladimir Veksler deriva o princípio de estabilidade de fase que torna possível a aceleração estável de partículas carregadas quando o regime relativístico tornava-se relevante. No ano seguinte, em Los Alamos, EUA, Edwin McMillan encontra, de forma independente, o mesmo princípio de sincronização e, no mesmo ano, lidera a construção do primeiro síncrotron [7].

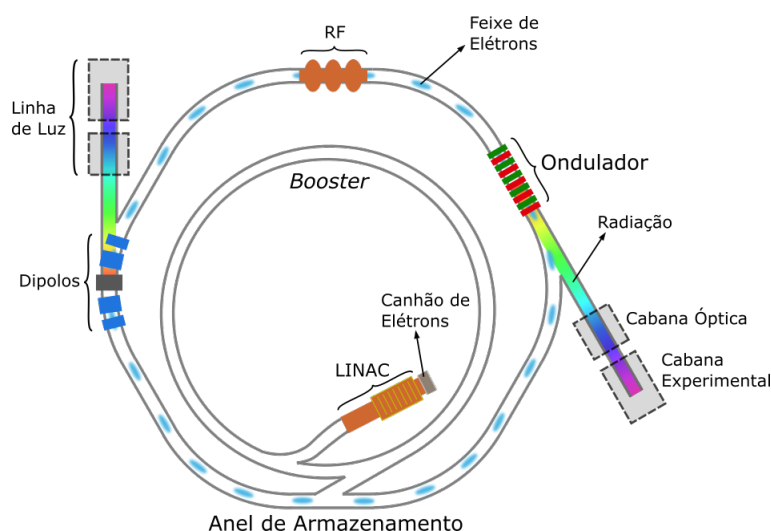


Figura 1 – Esquema dos principais componentes de instalações síncrotron modernas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O acelerador compõe-se de cinco partes principais [1], assim como ilustrado na Figura 1, são elas:

- Canhão de elétrons: consiste de uma chapa metálica, tal como de Tungstênio, que quando aquecida expela elétrons, segundo o efeito termoiônico;
- Acelerador linear (LINAC): conjunto de cavidades por onde pacotes de onda de radiofrequência (RF) viajantes acompanham os elétrons e, por ressonância do campo elétrico com o formato da cavidade, o campo resultante acelera o feixe de partículas.
- Anel de impulsão (*Booster*)*: anel de magnetos por onde os elétrons são continuamente acelerados por campos elétricos estacionários de cavidades de RF ressonantes até a energia de operação especificada para o anel de armazenamento.

*No sentido original da palavra, os *Boosters* seriam os verdadeiros síncrotrons, já que é neles onde os campos magnéticos são aumentados conforme o aumento da energia dos elétrons. Atualmente, porém, a palavra passou a se referir à máquina, o acelerador, como um todo ou mesmo ao anel de armazenamento [1].

- Anel de armazenamento: anel de magnetos onde o feixe produzido é mantido enquanto emite radiação, sendo a energia perdida pelos elétrons nesse processo reposta por cavidades de RF. Ele é composto por trechos retos seguidos por trechos curvos.
- Linhas de luz: estações experimentais localizadas após aberturas nos trechos curvos do acelerador. É nelas onde a radiação síncrotron é manipulada e aplicada para estudos de interesse.

Nos anéis do acelerador há uma rede magnética formada por ímãs ao redor da trajetória dos elétrons. Em cada trecho curvo há magnetos que curvam a trajetória dos elétrons, os chamados dipolos, e os eletroímãs de quadrupolo e sextupolo[†], responsáveis por focalizar o feixe.

Um dos síncrotrons mais avançados da atualidade é o Sirius, acelerador localizado na cidade de Campinas, São Paulo. Construído e operado pelo Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM), no ano de 2023 o Sirius conta com 14 estações experimentais (linhas de luz) em desenvolvimento ou operantes e disponíveis para usuários de toda a comunidade científica mundial. No futuro, a instalação abrigará até 38 estações [8].

[†] Apesar da expansão multipolar só incluir termos de monopolo, dipolo, quadrupolo, octopolo etc, “polos” no termo “ímã de multipolo” se refere à quantidade de polos magnéticos que o compõem e não a termos da expansão. Por exemplo, o sextupolo possui seis polos magnéticos, 3 sul e 3 norte, formando um hexágono.

3 Radiação

3.1 Eletromagnetismo de cargas pontuais

As equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos expressos em termos do potencial elétrico V e o potencial vetor \vec{A} , no calibre (*gauge*) de Lorenz [3], reduzem-se a duas equações de onda não homogêneas, nas quais temos ρ , densidade de carga, e \vec{J} , densidade de corrente elétrica, distribuídas no espaço como termos de fonte.

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Da solução geral dessas equações [3], conclui-se que a presença de campo eletromagnético a certa distância de uma fonte, seja ela uma distribuição de cargas estáticas ou em movimento, só acontece após um certo tempo desde que V e \vec{A} foram emitidos. Após emissão em instante t' , no qual a distância ao observador era R , a observação de campo só ocorre em instante $t = t' + R(t')/c$. Nesse sentido, diz-se que t' é o tempo retardado em relação ao tempo observado t .

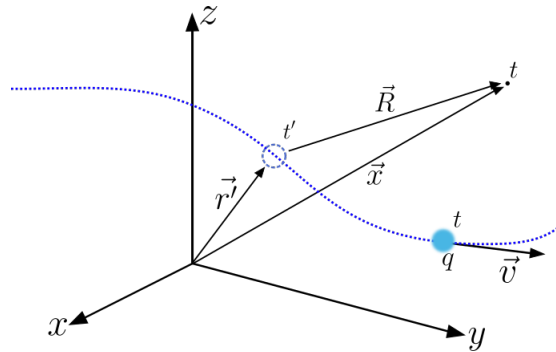


Figura 2 – Esquema de partícula carregada em movimento. Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja uma partícula de carga q em movimento, Figura 2, a posição do observador em relação à carga no instante t' é $\vec{R} = R\hat{n}$ e seu parâmetro de velocidade é $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. No caso de interesse, a fonte pontual está em movimento no vácuo, portanto $\vec{J} = \vec{0}$ e $\rho = 0$ em todo o espaço, exceto na posição da partícula. Nessas condições, as soluções das equações são os potenciais de Lienárd-Wiechert [3].

$$V(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})\right)_{t'}} ; \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\vec{\beta}}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \right)_{t'} = V(\vec{x}, t) \frac{\vec{\beta}(t')}{c}$$

De posse de V e \vec{A} , retornamos aos campos elétrico e magnético através das expressões:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ; \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Para o campo elétrico, as devidas substituições e manipulações algébricas nos levam a:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 c} \frac{1}{R} + \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \frac{1}{R^2} \right]_{t'} \quad (1)$$

A segunda parcela do campo depende de $1/R^2$ e diminui mais rapidamente do que o termo com $1/R$, portanto, ela torna-se desprezível a grandes distâncias e podemos escrever o campo abaixo. Esse será o regime adotado em todo o estudo desta monografia.

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \frac{1}{R} \right)_{t'} \quad (2)$$

Podemos calcular o transporte de energia por esse campo através do vetor de Poynting, $\vec{S}(t) = \epsilon_0 c^2 \vec{E}(t) \times \vec{B}(t)$. Para radiação de cargas pontuais, mostra-se que $\vec{B}(t) = \frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}(t)$ [3], logo:

$$\vec{S}(t) = \epsilon_0 c (E^2(t) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \vec{E}(t)) \vec{E}(t))$$

Pela expressão acima, nota-se que $|\vec{S}| \propto |\vec{E}|^2$. Com $|\vec{S}| = k/r^n$, constante ao longo de uma superfície esférica centrada na fonte, a potência de energia relativa a esse campo que é transmitida a uma distância R é:

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{k}{R^n} 4\pi R^2 = \frac{4\pi k}{R^{n-2}} \Rightarrow P \propto \frac{1}{R^{n-2}}$$

A condição de radiação é obtida para $|\vec{S}| = k/r^2$, já que $P = 4\pi k$ e não diminui com a distância, ou seja, os campos eletromagnéticos propagam-se indefinidamente transportando energia. Essa observação justifica a aproximação (2), que representa a parte do campo elétrico correspondente à radiação emitida pela partícula. Nota-se também uma característica geral de ondas eletromagnéticas: nesse regime, \vec{E} torna-se completamente ortogonal ao sentido de propagação \hat{n} .

3.2 Medidas de radiação

Para o melhor aproveitamento da radiação emitida, é importante a definição de parâmetros que nos permitem quantificar sua composição de frequências, bem como a sua dispersão, coerência, a taxa de recebimento de energia com o tempo e entre outros. Com isso, pode-se avaliar e adequar essa luz para estar em conformidade com os experimentos de destino.

A potência que atravessa uma unidade de área do observador é obtida projetando o transporte de energia \vec{S} de radiação sobre a direção de observação.

$$\vec{S}(t) \cdot \hat{n} = \epsilon_0 c (E^2(t) - (\hat{n} \cdot \vec{E}(t))^2) \Rightarrow \vec{S}(t) \cdot \hat{n} = \epsilon_0 c |\hat{n} \times (\vec{E}(t) \times \hat{n})|^2$$

O elemento de área observado pode ser expresso em termos do seu respectivo ângulo sólido à fonte como $dA = R^2(t')d\Omega$. Assim, podemos retirar de $\vec{S} \cdot \hat{n}$ sua dependência com a distância ao observador por meio do ângulo sólido preenchido pela radiação.

$$\vec{S}(t) \cdot \hat{n} = \frac{dP(t)}{dA} = \frac{dP(t)}{R^2(t')d\Omega} \Rightarrow \frac{dP(t)}{d\Omega} = \epsilon_0 c R^2(t') |\hat{n} \times (\vec{E}(t) \times \hat{n})|^2 =: |\vec{\mathcal{A}}(t)|^2$$

Para simplificação das expressões, definimos o vetor $\vec{\mathcal{A}}(t) = (\epsilon_0 c)^{1/2} R(t') \hat{n} \times (\vec{E}(t) \times \hat{n})$ e introduzimos sua transformada de Fourier e a respectiva transformada inversa.

$$\vec{\mathcal{A}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{A}}(t) e^{i\omega t} dt \quad ; \quad \vec{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{A}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

A energia total emitida por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP(t)}{d\Omega} dt \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathcal{A}}(t)|^2 dt$$

Do teorema de Plancherel (Parseval), $\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathcal{A}}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathcal{A}}(\omega)|^2 d\omega$, reescrevemos a distribuição angular da energia total por meio de uma expressão dependente das frequências ω da radiação.

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathcal{A}}(\omega)|^2 d\omega \quad (3)$$

Agora pode-se definir a distribuição angular espectral de energia irradiada $\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega}$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} =: \int_0^{\infty} \frac{d^2 I(\omega)}{d\Omega d\omega} d\omega$$

Integrou-se apenas em frequências positivas, já que o sinal de ω não possui significado físico [2]. Para distinguir de \mathcal{E} , na qual aplicou-se integrais no tempo, denota-se essa nova grandeza por $I(\omega)$. Utilizando Equação (3), obtém-se expressão direta para essa distribuição:

$$\frac{d^2 I(\omega)}{d\Omega d\omega} = 2 |\vec{\mathcal{A}}(\omega)|^2 \quad (4)$$

Esse resultado relaciona de maneira quantitativa o comportamento da potência irradiada como função do tempo com o espectro de frequências da energia irradiada [2].

3.3 Distribuições de radiação

No regime de interesse, o campo é ortogonal à direção de observação, $\hat{n} \cdot \vec{E} = 0$, logo $\vec{\mathcal{A}}(t) = (\epsilon_0 c)^{1/2} R(t') \vec{E}(t)$. A potência por unidade de ângulo sólido nos informa como a energia é espalhada angularmente. No tempo de emissão t' e a grandes distâncias, observa-se a distribuição angular de potência:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{d}{d\Omega} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dP(t)}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = |\vec{\mathcal{A}}(t)|^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})$$

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\left| \hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}) \right|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} \quad (5)$$

Uma das propriedades básicas de interesse da radiação é seu espectro, que representamos pela energia irradiada por unidade de frequência e por unidade de área ou ângulo sólido, dada pela Equação (4). Substituindo $\vec{A}(t)$ em termos do campo elétrico, encontramos:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{\epsilon_0 c}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} R(t') \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (6)$$

Por outro lado, calculamos explicitamente a transformada de Fourier de $\vec{A}(t)$ passando a variável de integração para o tempo de emissão e após algumas manipulações encontra-se:

$$\vec{A}(\omega) = i \left(\frac{q^2 \omega^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t' + R(t')/c)} dt'$$

No limite de campo distante, \vec{R} é aproximadamente paralelo a \vec{x} , vide Figura 2. Com isso, podemos aproximar a medida de R retirando de $x = |\vec{x}|$ a projeção de $\vec{r}' = \vec{r}(t')$ na direção de \vec{R} :

$$R(t') \approx x - \hat{n} \cdot \vec{r}'(t')$$

Nessa condição, finalmente encontramos uma expressão simplificada para a energia emitida por um elétron para frequências entre ω e $\omega + d\omega$ dentro de ângulo sólido $d\Omega$ na direção \hat{n} :

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) e^{i\omega(t' - \hat{n} \cdot \vec{r}'(t')/c)} dt' \right|^2 \quad (7)$$

Vemos também que a fase da radiação é:

$$\phi(t') = \omega(t' - \hat{n} \cdot \vec{r}'(t')/c) \quad (8)$$

3.4 Radiação Síncrotron

O controle do feixe de elétrons nos síncrotrons modernos através de dispositivos magnéticos permite obter diversas propriedades de interesse da luz síncrotron. Essa radiação possui alto brilho e coerência, além de polarização e energia controláveis, desde infravermelho até Raios X duros (comprimento de onda de 1 Å ou menor) [1]. Para introduzir as principais características de radiação síncrotron, vamos revisar a ação local de um campo magnético constante sobre uma partícula carregada [9], o que pode ser visto também como uma breve análise da radiação de ímã de dipolo.

Como resultado do seu movimento, a carga emite radiação, que a grandes distâncias distribui sua potência segundo a Equação (5). Consideremos uma partícula movimentando-se com $\vec{\beta} = \beta \hat{z}$,

sob uma aceleração $\vec{\beta} = \dot{\beta}\hat{x}$ e sua radiação sendo observada a uma direção $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Com isso, a potência por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2((1 - n_z\beta)^2 - n_x^2/\gamma^2)}{(1 - n_z\beta)^5} = \frac{q^2}{(4\pi)^2\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}\right)$$

Toda a radiação é emitida sob um cone muito estreito em torno de $\theta = 0$ e o movimento é ultrarrelativístico, então vamos aproximar $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$; $\sin \theta \approx \theta$ e $\beta \approx 1 - 1/(2\gamma^2)$. Inserindo as aproximações na distribuição de potência, temos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{2\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\gamma^6 \dot{\beta}^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left(1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2}\right) \quad (9)$$

Vemos que quanto maior for a aceleração imposta à carga, mais energia ela irradiará, já que a potência é proporcional ao quadrado da aceleração, $\frac{dP}{d\Omega} \propto \dot{\beta}^2 \Rightarrow P \propto \dot{\beta}^2$.

Além disso, podemos calcular a abertura angular que concentra a maior porção de radiação como o desvio-padrão do ângulo ponderado pela própria distribuição de potência, ou seja, $\sigma_\theta = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2}$. A função $\frac{dP}{d\Omega}$ é par em relação a θ , logo $\langle \theta \rangle = 0$. Por fim:

$$\sigma_\theta^2 = \langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \theta^2 \frac{dP}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega} \simeq \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \theta^2 \frac{dP}{d\Omega} \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{dP}{d\Omega} \theta d\theta d\phi}$$

O ângulo θ varia de 0 a π , porém sua integração foi estendida até $+\infty$, já que a energia irradiada diminui para próximo de 0 a pequenos valores de θ . Com isso, podemos aplicar a mudança de variáveis $\theta \rightarrow \alpha$, $\theta = \tan \alpha$, e realizar o cálculo. Por fim, encontramos:

$$\sigma_\theta = 1/\gamma \quad (10)$$

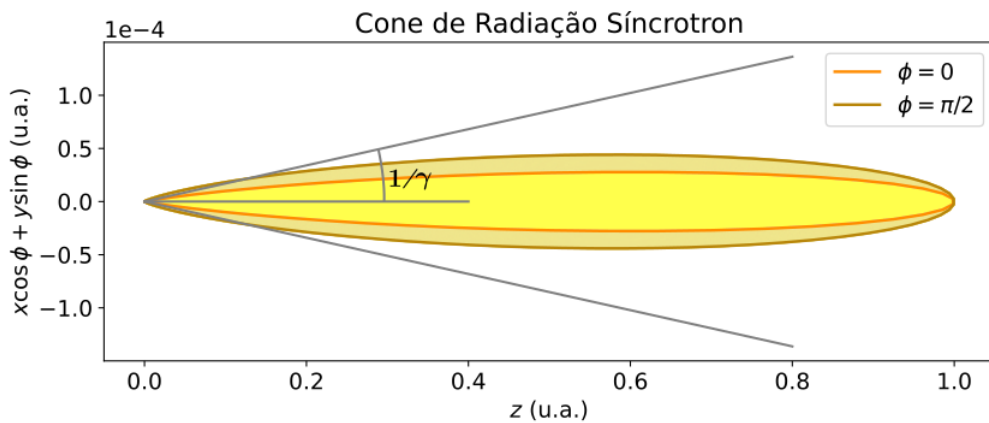


Figura 3 – Gráfico polar de (9) exibindo a radiação espalhada em uma abertura angular de $2/\gamma$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

4 Onduladores

Em síncrotrons modernos, além do uso natural dos setores curvos do acelerador para coletar a radiação oriunda dos dipolos, aproveitam-se também os trechos retos através dos chamados dispositivos de inserção (DIs) [6]. Esses equipamentos defletem o feixe por pequenas excursões transversais e, em seguida, manipulam-no novamente para retornar à trajetória sobre a direção longitudinal.

Os DIs mais predominantes nos síncrotrons são os wigglers e onduladores. Wigglers consistem de arranjos periódicos de blocos magnéticos que produzem campo oscilante no espaço, aproximadamente senoidal, o que leva os elétrons a seguirem um trajeto periódico também. Dessa forma, a radiação produzida nos vários períodos se combina constituindo um espectro do tipo de dipolo, porém com maiores intensidades [6].

Já onduladores são tais como wigglers, porém com campo magnético menos intenso ou período mais curto, o que resulta em deslocamentos transversais do feixe de elétrons suficientemente pequenos de modo que as frentes de onda emitidas a cada período se interferem construtivamente. A luz produzida então se distribui em um espectro composto por uma série de harmônicos de baixa largura de banda e alta intensidade, superiores muitas vezes às alcançadas com wigglers para as mesmas faixas de frequências [6].

Em contrapartida aos wigglers, como a radiação produzida pelos onduladores é quase monocromática, o que a maioria dos experimentos necessita, é possível aproveitar praticamente toda a luz produzida pelo dispositivo [1]. Além disso, através de configurações das fileiras (cassetes) de blocos magnéticos, a combinação de campo na vertical e horizontal leva a geração de radiação com polarização e energia controláveis [6]. Por tais razões, onduladores tornaram-se o dispositivo de inserção de maior interesse nos síncrotrons modernos.

4.1 Cinemática em um ondulador

Em um ondulador [10], um campo $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ exerce uma força magnética, segundo expressão da força de Lorentz, $\gamma m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$. Com isso, encontramos a trajetória do elétron.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma m} \left(\frac{dz}{dt} \left(\frac{dy}{dz} B_z - B_y \right), \frac{dz}{dt} \left(B_x - \frac{dx}{dz} B_z \right), \dot{x} B_y - \dot{y} B_x \right)$$

O ondulador tem efeito de alterar ligeiramente o movimento na transversal, em x e y , já na longitudinal, a velocidade $\frac{dz}{dt}$ continua ultrarrelativística. Nesse sentido, nota-se que os desvios angulares em relação à longitudinal, $\frac{dx}{dz}$ e $\frac{dy}{dz}$, são pequenos e, em primeira aproximação, podem ser desprezados. Com isso, as equações no plano transversal são:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{e}{\gamma m} \frac{dz}{dt} (-B_y, B_x)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{e}{\gamma m} \int (B_y, -B_x) dz \quad (11) \quad (x, y) = \frac{e}{\gamma m} \int \int (B_y, -B_x) dz dt \quad (12)$$

Vamos considerar um campo apenas na vertical, $\vec{B} = -B_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \hat{y}$, para um modelo de ondulator, logo o elétron apenas será defletido na horizontal.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e}{\gamma m} \int -B_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) dz \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m\gamma} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right)$$

O parâmetro de velocidade $\beta_x = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt}$ do elétron na direção horizontal é calculado e da sua expressão, reunindo as constantes relativas apenas ao dispositivo, define-se K , o parâmetro de deflexão.

$$\beta_x = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc\gamma} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) = \frac{K}{\gamma} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \quad (13) \quad K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc} \quad (14)$$

Como visto na Seção 3.4, a radiação síncrotron é emitida localmente em um cone de abertura típica $1/\gamma$, porém o elétron emite radiação durante todo o seu movimento oscilatório e, no total, a cada período, a radiação é espalhada em um cone de abertura K/γ . Se K é próximo de 1, o que caracteriza um ondulator, o maior desvio angular do elétron é cerca de $1/\gamma$, segundo a expressão acima, então a radiação emitida durante todo o seu movimento em tal DI permanece aproximadamente dentro desse cone, o que permite um efeito de interferência significativo [6]. A força magnética não realiza trabalho sobre uma partícula livre, por isso o elétron é defletido, porém o módulo da sua velocidade não se altera. Com isso, pode-se afirmar:

$$\beta_z^2 + \beta_x^2 = \beta^2 = \text{const} \Rightarrow \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \frac{K^2}{\gamma^2} \cos^2\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right)}$$

Para velocidades ultrarrelativísticas, como nos síncrotrons, $\gamma \gg 1$, assim, pode-se aproximar:

$$\beta_z \approx \beta \left(1 - \frac{K^2}{2\beta^2\gamma^2} \cos^2\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right)\right) = \beta \left(1 - \frac{K^2}{4\beta^2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\beta^2\gamma^2} \cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda_u}\right)\right)$$

É útil considerarmos o valor médio quadrático de $\beta_z c$ ao longo de um período magnético do ondulator. A média do cosseno em um período é nula e aproximando $1/\beta$ para 1, obtém-se:

$$\bar{\beta} = \langle \beta_z \rangle = \beta \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right) \quad (15) \quad \beta_z = \bar{\beta} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos\left(\frac{4\pi z}{\lambda_u}\right) \quad (16)$$

A velocidade média em z é $\bar{\beta}c$, logo uma primeira aproximação de $z(t')$ é $z(t') = \bar{\beta}ct'$. Define-se a frequência ω_0 referente ao período magnético:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{\bar{\beta}c}{\lambda_u}$$

Com isso, podemos integrar as velocidades e encontrar:

$$x(t') = \frac{K}{\gamma} \frac{c}{\omega_0} \sin(\omega_0 t') ; \quad z(t') = \bar{\beta}ct' - \frac{K^2}{4\gamma^2} \frac{c}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t')$$

Na maioria dos casos, o movimento da partícula é bem pequeno. Considerando uma faixa de valores típicos do parâmetro de deflexão, $K = 0.5 - 3$, período $\lambda_u = 50$ mm e energia $E = 3$ GeV, o ângulo de deflexão máximo na horizontal é 0,0833-0.50 mrad e a respectiva amplitude de oscilação é 0,66-4,00 μm . Em z , a oscilação em torno da média é ainda menor, com amplitude de 0,07-2,50 Å.

4.2 Interferência

Enquanto os elétrons oscilam dentro do ondulator, a aceleração máxima acontece nos extremos de sua trajetória e, como deduzido na seção 3.4, maior aceleração significa maior intensidade de radiação. Por isso, é comum considerarmos que as emissões acontecem só nesses pontos para o cálculo dos harmônicos [9], radiação que resulta de interferência construtiva.

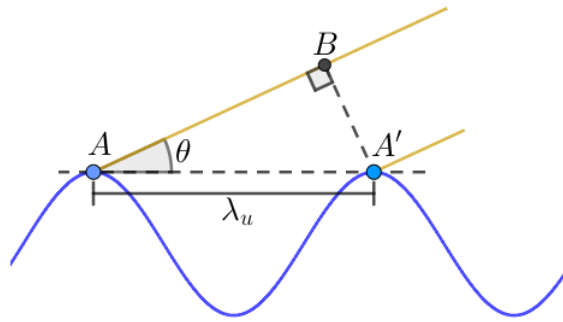


Figura 4 – Interferência entre dois raios luminosos emitidos em máximos consecutivos da trajetória do elétron no ondulator.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A emissão em A e A' , Figura 4, não acontece ao mesmo tempo, então não podemos afirmar que a diferença de caminho óptico é simplesmente $\overline{AB} = \lambda_u \cos \theta$. Consideremos que a luz é emitida em A no instante $t_A = 0$, assim, $t_B = \lambda_u \cos \theta / c$ e $t_{A'} = \frac{\lambda_u}{\beta c}$. A diferença de tempo entre as frentes de onda emitidas nesses polos consecutivos é $\Delta t = t_{A'} - t_B$, logo:

$$\Delta t = \frac{\lambda_u}{\beta c} - \frac{\lambda_u \cos \theta}{c} = \frac{\lambda_u}{\beta c} (1 - \beta \cos \theta)$$

A diferença de fase de um período a outro é $\omega \Delta t$ e deve ser um múltiplo de 2π para a interferência construtiva acontecer, então $2\pi n = \omega_n \Delta t$, logo:

$$1 - \beta \cos \theta = n \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{\omega_0}{\omega_1} \quad (17)$$

A equação em termos de comprimento de onda se torna $\lambda_n = \frac{\lambda_u}{n} \left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta \right)$. Aplicando (15) e usando $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$ e $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, encontra-se:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} (1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2) \quad (18)$$

Segundo equação acima, a chamada Equação do Ondulador, quanto menor o período magnético λ_u e maior a energia do feixe, e consequentemente o γ , menor serão os λ_n , ou seja, os comprimentos de onda emitidos. Um ondulador típico, com período de algumas dezenas de milímetros, produz radiação de alguns nanômetros, já que γ é da ordem de alguns milhares [6].

Vemos que os harmônicos também dependem do parâmetro K , logo da amplitude de campo magnético do dispositivo, Equação (14). Assim, curiosamente, um menor campo produz uma radiação de maior energia, o contrário de um dipolo, onde é necessário um campo maior para produzir λ menor [6]. Normalmente, os onduladores contêm mecanismo que permite variar a intensidade do seu campo, assim pode-se variar K e consequentemente os comprimentos de onda da luz produzida.

Os comprimentos de onda variam com o ângulo θ de observação, por isso a abertura das linha de luz é crucial para escolher as características adequadas da radiação. Em $\theta = 0$, isto é, sobre o eixo do ondulador, obtém-se os menores λ , logo as maiores energias emitidas pelo ondulador se concentram em torno da direção longitudinal.

4.3 Espectro

Com a trajetória já parametrizada, podemos inseri-la no cálculo da distribuição espectral angular de energia, Equação (7). Tomando-se \hat{n} uma direção tal que $\theta \ll 1$ na qual a radiação é observada e $r(t') = (x(t'), 0, z(t'))$ a posição da partícula, calcula-se a fase $\omega(t' - \hat{n} \cdot \vec{r}/c)$:

$$\omega(t' - \hat{n} \cdot \vec{r}/c) = \frac{\omega}{\omega_1} \omega_0 t' - u \omega \sin(\omega_0 t') + v \omega \sin(2\omega_0 t') \quad (19)$$

Na expressão, define-se as constantes $u = \frac{K}{\gamma \omega_0} \theta \cos \phi$ e $v = \frac{K^2}{8\gamma^2 \omega_0}$. Para o produto vetorial duplo na integral, $\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})$, considerando $K \ll \gamma$ e $\theta \ll 1$ pode-se desprezar termos de segunda ordem, ou seja, termos com $(K/\gamma)^2$, θ^2 ou $\theta(K/\gamma)$. Assim:

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) = (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \hat{n} - \vec{\beta} = (\theta \cos \phi - \beta_x, \theta \sin \phi, 0)$$

A integral a ser resolvida está definida para todo o tempo de movimento do elétron, isto é, t' de $-\infty$ a $+\infty$, todavia a partícula passa um tempo finito no ondulador. Consideremos então que a contagem de tempo se inicia na metade do primeiro período magnético, logo $t' \in \left[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{-\pi+2\pi N}{\omega_0}\right]$. Seja I a integral em (7), para todo o tempo no ondulador, e I_k para cada período, assim:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega_0}}^{(-1/2+N)\frac{2\pi}{\omega_0}} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{(-1/2+k)\frac{2\pi}{\omega_0}}^{(1/2+k)\frac{2\pi}{\omega_0}} = \sum_{k=0}^{N-1} I_k \Rightarrow I = \sum_{k=0}^{N-1} I_k$$

Fazemos uma mudança de variável e passamos do tempo contado desde o início do ondulador para o tempo contado apenas em cada período, ou seja, de t' para $t' - k\frac{2\pi}{\omega_0}$, assim:

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}(t' - 2k\pi/\omega_0)) e^{i\omega(t' - 2k\pi/\omega_0 - \hat{n} \cdot \vec{r}(t' - 2k\pi/\omega_0)/c)} dt'$$

O movimento do elétron é periódico, logo sua velocidade também é periódica, por isso $\vec{\beta}(t' - 2k\pi/\omega_0) = \vec{\beta}(t')$. Por outro lado, a posição longitudinal é sempre crescente, então a fase se torna crescente também com o tempo. Substituindo $t' - 2k\pi/\omega_0$ na coordenada z , chegamos em:

$$z(t' - 2k\pi/\omega_0) = z(t') - k\lambda_u = z(t') - 2k\pi\bar{\beta}c/\omega_0$$

Reunindo os termos adicionais devido ao avanço de fase separadamente, a integral se torna:

$$I_k = I_0 e^{-ik\delta} \quad ; \quad \delta = \omega \frac{2\pi}{\omega_0} (1 - \bar{\beta} \cos \theta)$$

Segundo Equação (17), $1 - \bar{\beta} \cos \theta = \omega_0/\omega_1$, logo $\delta = 2\pi \frac{\omega}{\omega_1}$. Com isso, o módulo quadrado da integral ao longo de todo o ondulator é:

$$|I|^2 = |I_0|^2 \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ik\delta} \right|^2 = |I_0|^2 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = |I_0|^2 \frac{\sin^2(N\pi\omega/\omega_1)}{\sin^2(\pi\omega/\omega_1)} = N^2 |I_0|^2 \cdot L(N\omega/\omega_1)$$

Normalizando pelo número total de períodos N , definimos a função de grade, $L(N\omega/\omega_1)$, por analogia com o padrão de interferência por grades de difração. Nos gráficos de L abaixo percebe-se que quanto mais períodos, mais estreitos serão as linhas do espectro do ondulator em torno dos harmônicos, assim como observa-se nos padrões de radiação por grades de difração.

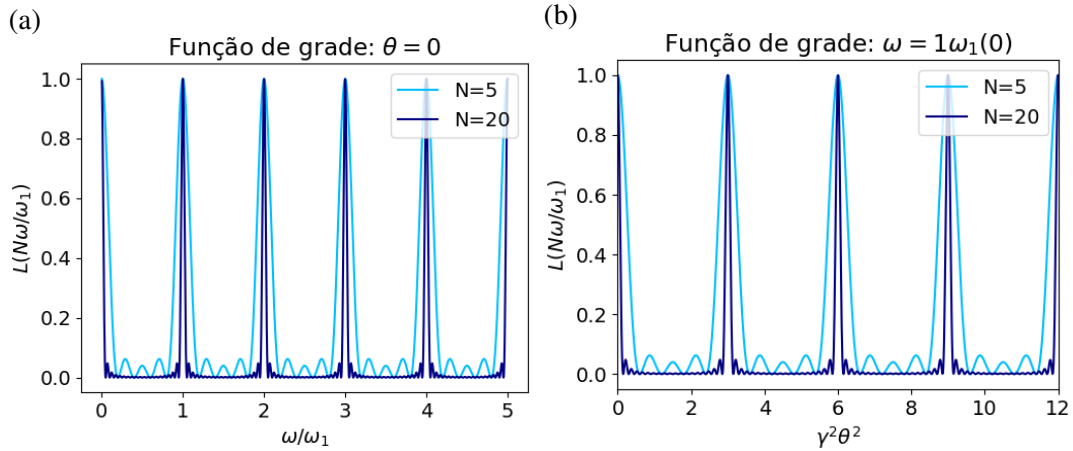


Figura 5 – Linhas de interferência. (a) Ângulo fixo: sobre eixo do ondulator. (b) Frequência fixa: harmônico 1 sobre eixo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os máximos de $\frac{\sin^2(N\alpha)}{N^2 \sin^2(\alpha)}$ acontecem quando $\alpha_k = k\pi$ e os mínimos adjacentes quando $N(\alpha_{\pm} - k\pi) = \pm\pi$. O perfil dos picos é aproximadamente triangular, logo podemos estimar a sua largura a meia altura (FWHM) como a metade da base do triângulo, ou seja, $\Delta\alpha_k = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} = \pi/N$. No caso do ondulator, $\alpha = \pi\omega/\omega_1$, sendo $\omega_1 = \omega_1(\theta)$, como aponta a Equação (17), logo $\Delta(\omega/\omega_1) = 1/N$.

Tomando-se um ângulo fixo e frequências em torno de um harmônico k , Figura 5a, a largura de frequências é $\Delta\omega_k = \omega_1/N$, ou seja, o espectro emitido observado em certa direção fixa possui

harmônicos de mesma largura ω_1/N . Em termos da frequência ω_k observada:

$$\Delta\omega_k = \frac{k\omega_1}{kN} \Rightarrow \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} = \frac{1}{kN}$$

Para uma determinada frequência, Figura 5b, observa-se também interferência construtiva a diferentes ângulos constituindo espectro formado por linhas. Em cada ângulo dos máximos de emissão tem-se uma largura $\Delta(k\omega_1(0)/\omega_1(\theta)) = 1/N \Rightarrow \Delta(\theta^2) = \frac{1+K^2/2}{\gamma^2 kN}$, portanto:

$$\Delta\theta \simeq \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1+K^2/2}{kN}}$$

A abertura angular do cone em que a radiação se espalha é da ordem de $(\gamma\sqrt{N})^{-1}$, ou seja, menor do que a emissão local de radiação síncrotron, Equação (10), e diminui com o número de períodos.

Separando o fator de interferência $N^2 L(N\omega/\omega_1)$ do restante da expressão do espectro, nota-se que todo o perfil de intensidade de radiação é determinado por apenas um período de movimento, que é calculado na integral I_0 . A dependência temporal na exponencial dessa integral pode ser reescrita em termos de funções de Bessel de índices inteiros j , segundo a expansão de Jacobi-Anger:

$$e^{ia \sin(\omega t)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(a) e^{ij\omega t}$$

Aplicando essa expansão na fase (19), obtém-se:

$$e^{i\omega(t' - \hat{n} \cdot \vec{r}/c)} = \sum_{n,m} J_n(v\omega) J_m(u\omega) e^{iR_\omega \omega_0 t'} ; \quad R_\omega = \omega/\omega_1 - m + 2n$$

Assim, pode-se resolver a integral I_0 de exponenciais com e sem cosseno e expressar os resultados em termos da função sinc $x = \sin x/x$. Por fim, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 N^2}{16\pi\epsilon_0 c \gamma^2 \omega_0^2} & \left| \sum_{n,m} J_n(v\omega) J_m(u\omega) \left[2\gamma\theta(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) \text{sinc}(\pi R_\omega) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \hat{x}K[\text{sinc}(\pi(R_\omega + 1)) + \text{sinc}(\pi(R_\omega - 1))] \right] \right|^2 L\left(\frac{N\omega}{\omega_1}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Como mostrado na Equação (6), a expressão dentro do módulo quadrado é relacionada ao campo elétrico da radiação, por isso, podemos analisar a polarização da radiação emitida apenas analisando as componentes \hat{x} e \hat{y} dentro do módulo. Como não há diferença de fase entre essas componentes, a radiação é linearmente polarizada. Além disso, sobre o eixo, quando $\theta = 0$, a polarização é completamente horizontal, só resta a componente \hat{x} na expressão.

Ainda sobre o eixo do ondulador, o parâmetro u é nulo, já que $\theta = 0$, então temos $J_m(0)$. Nesse caso, as funções de Bessel são não nulas apenas quando $m = 0$, com $J_0(0) = 1$, logo:

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{e^2 \omega^2 N^2 K^2}{16\pi\epsilon_0 c \gamma^2 \omega_0^2} \left| \hat{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v\omega) \left[\text{sinc}(\pi(R_\omega + 1)) + \text{sinc}(\pi(R_\omega - 1)) \right] \right|^2 L\left(\frac{N\omega}{\omega_1}\right) \quad (21)$$

Quando observa-se um harmônico k , os sinc são não nulos apenas quando $R_\omega \pm 1 = 0$, logo quando as funções de Bessel têm os índices $n = -(k \pm 1)/2$. Além disso, $L(Nk) = 1$, então:

$$\left. \frac{d^2 I(\omega_k)}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{e^2 \omega^2 N^2 \gamma^2}{16\pi \epsilon_0 c \omega_0^2} K^2 |J_{(k+1)/2}(v\omega_k) - J_{(k-1)/2}(v\omega_k)|^2$$

Se k é par, então o índice $-(k \pm 1)/2$ não é inteiro e não existirá um n pelo qual as funções de Bessel passaram para $J_n(v\omega)$ sinc $(\pi(R_\omega \pm 1))$ ser não nulo. Por essa razão, sobre o eixo, não há radiação referente a harmônicos pares, só aos ímpares.

A expressão nos fornece a energia irradiada pela passagem de um elétron através do ondulador. É mais comum expressar essa medida em termos do fluxo de fótons emitidos por um feixe de elétrons, então, para isso, calculamos a potência como $P = I(\omega) \cdot I_b/e$, sendo I_b a corrente elétrica do feixe (carga por tempo de volta no acelerador), e, com isso, o número de fótons de certo harmônico por segundo, $\dot{n} = P/(\hbar\omega)$. Por fim, temos o fluxo de fótons \dot{n} por unidade de ângulo sólido $d\Omega$ e por unidade de largura de banda relativa $d\omega/\omega$, mais referida como densidade espectral angular de fluxo [6], cuja unidade é fótons/s/mrad²/0,1%bandwidth = 10⁻⁹fótons/s/rad²/bandwidth. A Figura 6 exhibe o espectro (21), calculado segundo Equação (22), com a corrente de operação do Sirius - CNPEM.

$$\frac{d^2 \dot{n}}{d\Omega d\omega/\omega} = \frac{\hbar\omega}{\hbar} \frac{d^2 \dot{n}}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\hbar} \frac{I_b}{e} \frac{d^2 I(\omega)}{d\Omega d\omega} \quad (22)$$

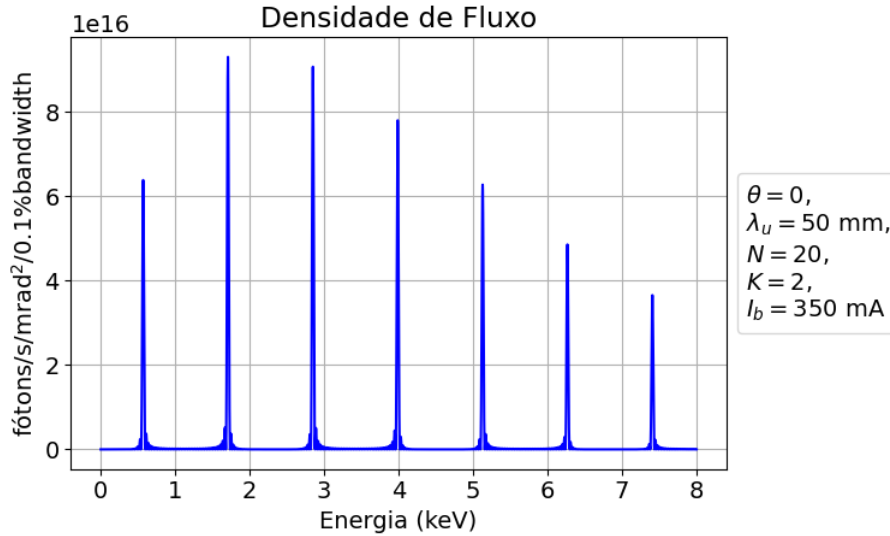


Figura 6 – Densidade espectral angular de fluxo de fótons para os parâmetros especificados.
Fonte: Elaborada pelo autor.

5 Onduladores na Prática

A realização teórica de onduladores data de 1947, por V. L. Ginzburg [11]. Posteriormente, em 1951, Motz e colaboradores analisam as propriedades teóricas da radiação de onduladores [12] e em 1953 constroem o primeiro exemplar [13]. Em 1981, Halbach [14] utiliza a ideia de vetores magnetização cuja rotação evolui linearmente em uma direção, tal como na Figura 7a, para produção de campo de multipolo e de onduladores. Nesse mesmo artigo, ele apresenta o arranjo de 4 blocos por período, Figura 7b, configuração usada até hoje, pois é um bom compromisso entre fácil manufatura e campo aproximadamente senoidal.

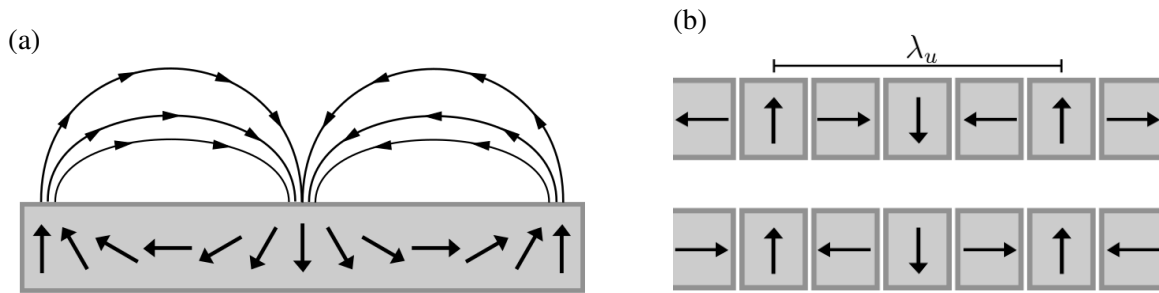


Figura 7 – Vetores magnetização rotacionando ao longo do comprimento do objeto. (a) Caso ideal. (b) Arranjo de Halbach para onduladores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Há diferentes modelos de onduladores quanto ao formato e distribuição dos cassetes de blocos, cada um com o propósito de melhorar alguma característica da radiação. O tipo mais comum é o planar, composto por dois cassetes de blocos tipicamente retangulares, um superior e outro inferior.

É de muito interesse a capacidade de controlar os parâmetros da radiação que os onduladores produzem. Para isso, adiciona-se ao dispositivo suportes mecânicos para movimentação dos seus cassetes, o que altera o campo e, consequentemente, a radiação produzida. O ondulador do tipo APU (*Adjustable Phase Undulator*) [15] permite o deslocamento na longitudinal de um dos cassetes, o que resulta em diminuição da amplitude do campo e controle do parâmetro de deflexão K . É de muita utilidade também a manipulação da polarização da radiação, assim surgem os onduladores com blocos produzindo campo na direção horizontal e vertical através da adição de mais fileiras nas regiões superiores e inferiores, como nos chamados APPLE (*Advanced Planar Polarizer Light Emitter*) [16].

5.1 Análises de campo de onduladores reais

Um ondulador deve satisfazer dois requisitos principais de operação: as posições e direções de movimento finais dos elétrons não devem variar em relação às da entrada e a interferência construtiva deve ser máxima de período a período para garantir a máxima intensidade de radiação. Essas duas características são expressas pelas integrais de campo e o erro de fase [6], análises descritas a seguir.

Como apresentado nas Equações (11) e (12), a posição e velocidade do elétron são relacionadas diretamente às integrais do campo magnético. Utilizando $\frac{dz}{dt} \approx c$, podemos expressar a segunda integral de (12) como função de z e expressar o ângulo da direção de movimento a partir das velocidades, $x' = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt}$ e $y' = \frac{1}{c} \frac{dy}{dt}$, com isso as posições e direções finais são:

$$(x', y') = \frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^{+\infty} (B_y, -B_x) dz ; \quad (x, y) = \frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (B_y, -B_x) dz' dz$$

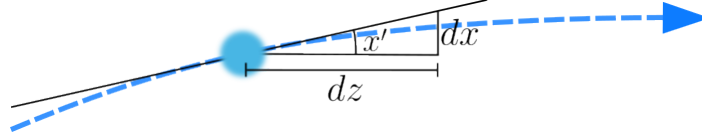


Figura 8 – Inclinação da direção de movimento do elétron. Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, idealmente, ambas as integrais devem ser nulas para não haver um desvio do feixe de elétrons na saída do DI. Na prática, como observado no CNPEM, é possível alcançar integrais da ordem de 25 Gcm para primeira integral e 10 k Gcm² para a segunda. Para elétrons a 3 GeV, isso equivale a cerca de 2,5 μ rad ou 0,5'' de ângulo e 10 μ m em deslocamento, respectivamente.

Além disso, erros de magnetização dos blocos e de construção mecânica resultam em perfis de campo imperfeitos, o que se reflete em uma diminuição da emissão de radiação. A medida da correlação entre erros de campo e intensidade de radiação é dada pelo erro de fase. Mostra-se que a intensidade cai exponencialmente com o número do harmônico k e o valor RMS σ_ϕ desse erro, com $I \propto e^{-k^2 \sigma_\phi^2}$ [17]. Por essa razão busca-se anular o erro de fase para obter a máxima emissão.

A fase da radiação de um ondulator pode ser pensada como o atraso da frente de onda emitida pelo elétron em relação a sua posição longitudinal, isto é, a fase associada a um comprimento $\Delta L = ct - z$, $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$, o que pode ser mostrado analiticamente da Equação (8). Considerando s o comprimento da trajetória desenvolvida pela partícula, então $\beta ct = s$. Por fim, a fase para cada posição z é:

$$\phi(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{s(z)}{\beta} - z \right) \quad (23)$$

No caso ideal, a partícula percorre o mesmo comprimento de um período magnético a outro, $\Delta s = \text{const}$, logo a fase ϕ^0 é linear nos polos j de campo. Dessa maneira, o erro de fase $\delta\phi$ é estabelecido como o desvio em relação a um comportamento linear nos polos, ou seja, $\delta\phi_j = \phi_j - \phi_j^0$. Define-se então $\sigma_\phi = \langle \delta\phi_j \rangle_{RMS}$, cujo valor típico almejado é de cerca de 5°, o que corresponde a uma diminuição de 7% na intensidade do terceiro harmônico, por exemplo.

Após o ondulator ser construído, haverá imperfeições no seu campo magnético, sejam por erros mecânicos de fixação e montagem dos blocos e cassetes ou magnéticos, da magnetização medida e a real dos blocos. Por isso, faz-se necessário uma série de etapas de medição e ajustes para otimização da qualidade do dispositivo através de métodos baseados nos parâmetros apresentados.

5.2 Onduladores CNPEM - Sirius

A fonte de luz síncrotron Sirius inclui diversos onduladores ao longo do seu anel de armazenamento. Eles devem ser construídos especialmente para atender as necessidades de energia e polarização das linhas de luz. O projeto magnético de um ondulador exige diversas simulações magnetostáticas e ajustes práticos de campo que serão brevemente apresentadas a seguir.

Para simulação, além de outros softwares, é utilizado o Radia [18], um pacote de métodos numéricos para cálculos magnetostáticos otimizado para onduladores e wigglers e amplamente aplicado no desenvolvimento de DIs pelo mundo. Com esse pacote é possível construir o conjunto de blocos do ondulador dadas suas dimensões, posições e vetores magnetização iniciais.

A partir disso, cada objeto é subdividido em volumes menores, nos quais magnetização \vec{M} uniforme é assumida, então a magnetização resultante da interação entre blocos é encontrada por iterações a partir do seu campo. No espaço em torno dos objetos $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ logo $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$, sendo Φ_m o potencial magnético escalar [2].

$$\Phi_m(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{R} da'$$

Para cada subdivisão, $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, assim, o campo magnético de cada uma é calculado pelo pacote segundo expressão abaixo e, por superposição, o campo do conjunto é determinado.

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{R}(\hat{n}' \cdot \vec{M})}{R^3} da' \quad (24)$$

Um exemplo é o PAPU50 (*Prototype Adjustable Phase Undulator*; período 50 mm), um ondulador planar do tipo APU, concluído no ano de 2023 no CNPEM. Ele está em uso na linha de luz SAPUCAIA (Scattering APParatUs for Complex Applications and In-situ Assays), do Sirius, dedicada à caracterização estrutural de materiais nano e microestruturados aplicando a técnica de Espalhamento de Raios X a Baixos Ângulos (SAXS) [8].

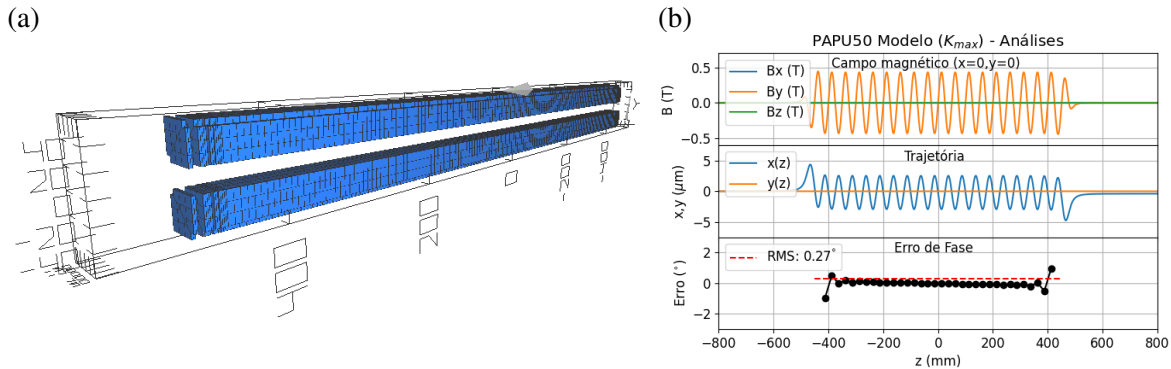


Figura 9 – PAPU50. (a) Modelo computacional Radia. (b) Resultados calculados do modelo.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o modelo do PAPU50, Figura 9a, calculou-se seu campo magnético pelo Radia e pôde-se encontrar a respectiva trajetória de um elétron segundo suas equações de movimento por meio do método de Runge-Kutta de ordem 4, além de calcular o erro de fase (23) nos polos (máximos e mínimos), como apresentado na Figura 9b.

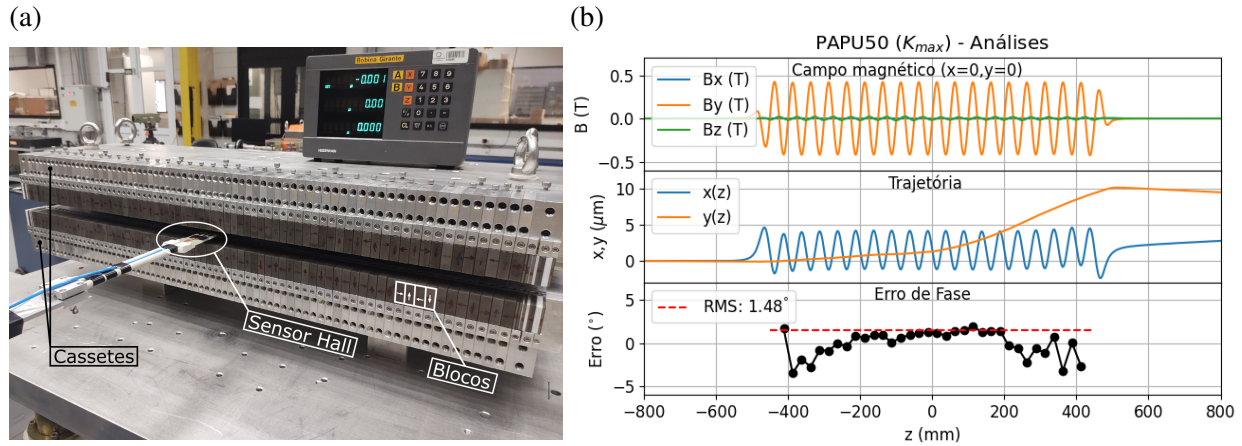


Figura 10 – PAPU50 montado. (a) Medição de campo por sensor Hall. (b) Análises finais, após ajustes. Fonte: (a) Foto adaptada de Reinaldo Basílio. (b) Elaborada pelo autor.

A Figura 10a exibe o PAPU50 em medição no qual é identificar o sensor Hall, os cassetes superior e inferior e os blocos em arranjo de Halbach. Já na Figura 10b tem-se o campo medido sobre eixo, os resultados de trajetória com desvios e o respectivo erro de fase. Com isso, exemplificamos as análises descritas anteriormente, importantes para os ajustes práticos.

6 Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se uma descrição geral de radiação, seus fundamentos eletromagnéticos, definição e as diferentes maneiras de caracterizá-la através de suas distribuições angulares de energia e por frequência emitida, seu espectro. Essa foi a base para a posterior discussão de radiação síncrotron emitida por elétrons em regime ultrarrelativístico, $\beta \approx 1$, e de onduladores, dispositivo que a produz, objetivo desse estudo.

Discutiu-se a produção de radiação por um ondulador do tipo planar APU, com campo magnético apenas em uma direção, considerada vertical. Mostrou-se que um dispositivo de período magnético de alguns milímetros produz radiação de comprimentos de onda da ordem de nanômetros. Além disso, devido a interferência de período a período, o espectro constitui-se de harmônicos de grande intensidade. Também, a radiação é linearmente polarizada e, sobre a direção do eixo do dispositivo, é completamente polarizada na direção horizontal.

Por fim, comentou-se os aspectos práticos de construção de onduladores em geral. A teoria apresentada e referenciada proporcionou a definição da qualidade de onduladores reais por meio das análises de suas integrais de campo, o que os caracteriza como um dispositivo de inserção, isto é, não proverem desvios totais acentuados do movimento inicial dos elétrons, e do seu erro de fase, medida da interferência construtiva da radiação. Ainda, pôde-se ilustrar um exemplo prático com o PAPU50, mostrando resultados a partir de dados simulados e medidos do dispositivo real.

Referências

- 1 WILLMOTT, P. **An Introduction to synchrotron radiation: techniques and applications**. 2. ed. New Jersey: Wiley, 2019. 512 p.
- 2 JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3. ed. New York: Wiley, 1998. 832 p.
- 3 GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010. 424 p.
- 4 TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Modern physics**. 6. ed. New York: W. H. Freeman, 2012. 700 p.
- 5 WIEDEMANN, H. **Particle accelerator physics**. 4. ed. New York: Springer, 2015. 1050 p.
- 6 CLARKE, J. A. **The science and technology of undulators and wigglers**. New York: Oxford University Press, 2004. 244 p.
- 7 JACKSON, J. D.; PANOFSKY, W. Edwin Mattison McMillan biographical memoir. In: **Biographical Memoirs**. Washington: National Academies Press, 1996. v. 69, p. 215–241.
- 8 LABORATÓRIO NACIONAL DE LUZ SÍNCROTRON. **Linhas de luz**. 2023. Disponível em: <https://lnls.cnpm.br/linhas-de-luz/>. Acesso em: 20 de setembro de 2023.
- 9 DUKE, P. J. **Synchrotron radiation: production and properties**. New York: Oxford University Press, 2000. 272 p.
- 10 WALKER, R. Insertion devices: undulators and wigglers. In: CAS - CERN Accelerator School: Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers, 1996, Grenoble, France. **Proceedings [...]**. Geneva: CERN, 1998. p. 129–177.
- 11 GINZBURG, V. L. Radiation of microwaves and their absorption in air. **Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Fizicheskaya**, v. 11, n. 2, p. 165–182, 1947.
- 12 MOTZ, H. Applications of the radiation from fast electron beams. **Journal of Applied Physics**, v. 22, n. 5, p. 527–535, 1951.
- 13 MOTZ, H.; THON, W.; WHITEHURST, R. N. Experiments on radiation by fast electron beams. **Journal of Applied Physics**, v. 24, n. 7, p. 826–833, 1953.
- 14 HALBACH, K. Physical and optical properties of rare earth cobalt magnets. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research**, v. 187, n. 1, p. 109–117, 1981.
- 15 CARR, R. Adjustable phase insertion devices as x-ray sources. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A**, v. 306, n. 1-2, p. 391–396, 1991.
- 16 SASAKI, S. Analyses for a planar variably-polarizing undulator. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A**, v. 347, n. 1-3, p. 83–86, 1994.
- 17 WALKER, R. Interference effects in undulator and wiggler radiation sources. **Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A**, v. 335, n. 1-2, p. 328–337, 1993.
- 18 CHUBAR, O.; ELLEAUME, P.; CHAVANNE, J. A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices. **Journal of Synchrotron Radiation**, v. 5, n. 3, p. 481–484, 1998.